

FYSA210/K2 KÄÄNTÖHEILURI

Työn tarkoituksena on määrittää putoamiskiihtyvyyden arvo reversio- eli kääntöheilurin avulla. Ennen laboratoriovuoroa on syytä kerrata matemaattisiin ja fysikaalisiin heilureihin liittyvät ominaisuudet esimerkiksi Youngin ja Freedmanin kirjasta *University Physics with Modern Physics*, 11th edition sivut 495 - 499 (10th edition sivut 407 – 410). Vastaavat tiedot toki löytyvät myös lukuisista muista fysiikan perusteoksista.

1 Johdanto

Putoamiskiihtyvyyden tarkka numeroarvo on hyvin merkittävä monissa fysiikan ja erityisesti mekaniikan laskuissa. Johtuen maapallon muodosta (navoiltaan litistynyt pyörähdysellipsoidi) ja sen pyörivästä liikkeestä akselinsa ympäri, putoamiskiihtyvyyden arvo vaihtelee eri puolella palloa. Päiväntasaajan seudulla putoamiskiihtyvyyden arvo on pienempi kuin napojen lähistöllä. On siis selvää, että jo paljon ennen uudenaikaisia mittalaitteita oli tarve kehittää mittaussuunnitelma, jolla sen arvo voitaisiin määrittää luotettavasti, tarkasti ja tehokkaasti. Vuonna 1817 Englantilainen Henry Kater kehitti tähän tarkoitukseen soveltuvan reversio- eli kääntöheilurin.

Kääntöheiluri koostuu suorasta tangosta ja kahdesta tankoon kiinnitettävästä massasta, joiden paikkoja voidaan muuttaa. Heiluri voidaan saattaa heilahtelemaan lähellä tangon toista päätä olevasta tukipisteestä. Se voidaan myös kääntää ylösalaisin ja saattaa heilahtelemaan lähellä toista päätä olevan tukipisteen varassa. Heilurin massajakauma voidaan saattaa sellaiseksi, että nämä heilahdusajat ovat samat. Tällöin heilurin heilahdusaika on sama kuin sellaisen matemaattisen heilurin, jonka ”varren” pituus on yhtä suuri kuin kääntöheilurin kahden tukipisteen etäisyys.

Tässä harjoitustyössä käytettävä laitteisto on lähes samanlainen kuin alkuperäinen Katerin heiluri. Heilahdusaikojen mittaamisen helpottamiseksi ja tarkentamiseksi heilahduksia havainnoimaan on asetettu valoportti. Valoportilla saatu data syötetään tietokoneeseen, jossa sitä voidaan tarkastella ja käsitellä DataStudio-ohjelman avulla.

2 Teoriaa

Reversioheiluri on fysikaalinen heiluri, mikä tarkoittaa sitä, että sen massa ei ole keskittynyt yhteen pisteeseen kuten matemaattisessa heilurissa. Heilurin potentiaalienergia saadaan massakeskipistettä tarkastelemalla:

$$U = -Mgs \cos \theta, \quad (1)$$

missä M on heilurin kokonaismassa, s on painopisteen etäisyys heilahdusakselista, θ on heilahduskulma ja g on putoamiskihtiävyys. Kineettinen energia puolestaan on muotoa

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega_i^2 r_i^2, \quad (2)$$

missä m_i on heilurin i :n osan massa, ω_i sen kulmanopeus ja r_i sen etäisyys heilahdusakselista. Jäykän kappaleen tapauksessa kulmanopeus ω_i vastaa kaikilla i heilahduskulman aikaderivaatan arvoa $\dot{\theta}$. Kappaleen hitausmomentin arvo J mielivaltaisen akselin suhteen saadaan ns. Steinerin säännön [1] $J = J_P + Ms^2$ avulla, missä J_P on hitausmomentti massakeskipisteen P suhteen ja s on massakeskipisteen etäisyys heilahdusakselista. Steinerin sääntöä käyttäen voidaan kineettisen energian lauseke esittää muodossa

$$T = \frac{(\dot{\theta})^2}{2} \sum_i m_i r_i^2 = \frac{(\dot{\theta})^2}{2} J = \frac{(\dot{\theta})^2}{2} (J_P + Ms^2). \quad (3)$$

Tarkasteltaessa heiluria ideaalisena, eli vastusvoimia ei oteta huomioon, voidaan energian säilymislain perusteella olettaa, että heilurin kokonaisenergia E on vakio

$$E = T + U = \frac{(\dot{\theta})^2}{2} (J_P + Ms^2) - Mgs \cos \theta = C. \quad (4)$$

Jos heilahduskulman arvot ovat pieniä, voidaan tehdä approksimaatio $\cos \theta \approx 1 - \theta^2$ ja yhtälöstä (4) saadaan

$$(\dot{\theta})^2 + \frac{2Mgs}{J_P + Ms^2} \theta^2 = K, \quad (5)$$

missä K on vakio. Tämän 1. asteen differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on muotoa

$$\theta(t) = \theta_a \sin(\omega t + \varphi), \quad (6)$$

missä θ_a on heilahduskulman amplitudi, φ on vaihe ja

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mgs}{J}} = \sqrt{\frac{Msg}{J_P + Ms^2}} \quad (7)$$

on fysikaalisen heilurin kulmataajuus, kun amplitudi on pieni [1].

Fysikaalisen heilurin heilahdusaika voidaan ratkaista yhtälöstä (7) ja sitä voidaan tarkastella matemaattisen heilurin heilahdusajan lausekkeen avulla.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{Mgs}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_P + Ms^2}{Mgs}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_P}{Mgs} + \frac{s}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (8)$$

Siten on olemassa sellainen matemaattinen heiluri, jonka heilahdusaika on sama kuin tarkasteltavan fysikaalisen heilurin. Matemaattisen heilurin varren pituus on tällöin redusoitu heilahduspituus L .

Ratkaistaessa yhtälöstä (8) redusoitu heilahduspituus saadaan lauseke

$$L = \frac{J}{Ms} = \frac{J_P + Ms^2}{Ms} = \frac{J_P}{Ms} + s \Leftrightarrow Ls = \underbrace{\frac{J_P}{M}}_{=k^2} + s^2 = k^2 + s^2, \quad (9)$$

missä k on hitaussäde. Tarkastellaan yhtälöä edelleen muodossa

$$s^2 - Ls + k^2 = 0. \quad (10)$$

Toisen asteen yhtälön juurten summa on yhtä kuin ensimmäisen asteen kertoimen vastaluku. Kun tiedetään että toinen juuri on s , voidaan helposti päätellä että toinen on muotoa $s' = L - s$. Redusoitu heilahduspituus on siis sama kuin heilahdusakselien välimatka kääntöheilurissa.

Toisaalta on huomattava, että L on aina suurempi kuin massakeskipisteen ja rotaatioakselin välimatka, mistä johtuen heilurin heilahdusajat lyhenevät massan sijaitessa lähempänä painopistettä. Merkitään tarkkailtavan heilurin heilahdusakselin pisteitä A ja A' . Kun heilurin liikettä tarkastellaan akselin A suhteen, on akselin ja painopisteen etäisyys s . Suorittaessa reversio eli käännettäessä heiluri siten, että A' on uusi heilahdusakseli, on vastaava etäisyys siis $s' = L - s$.

Tarkastellaan yhtälöä (8) heilahdusakselin A' suhteen.

$$T_{A'} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{Mgs'}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_P + Ms'^2}{Mgs'}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_P}{Mgs'} + \frac{s'}{g}} = \sqrt{\frac{J_P}{Mg(L-s)} + \frac{L-s}{g}} = \quad (11)$$

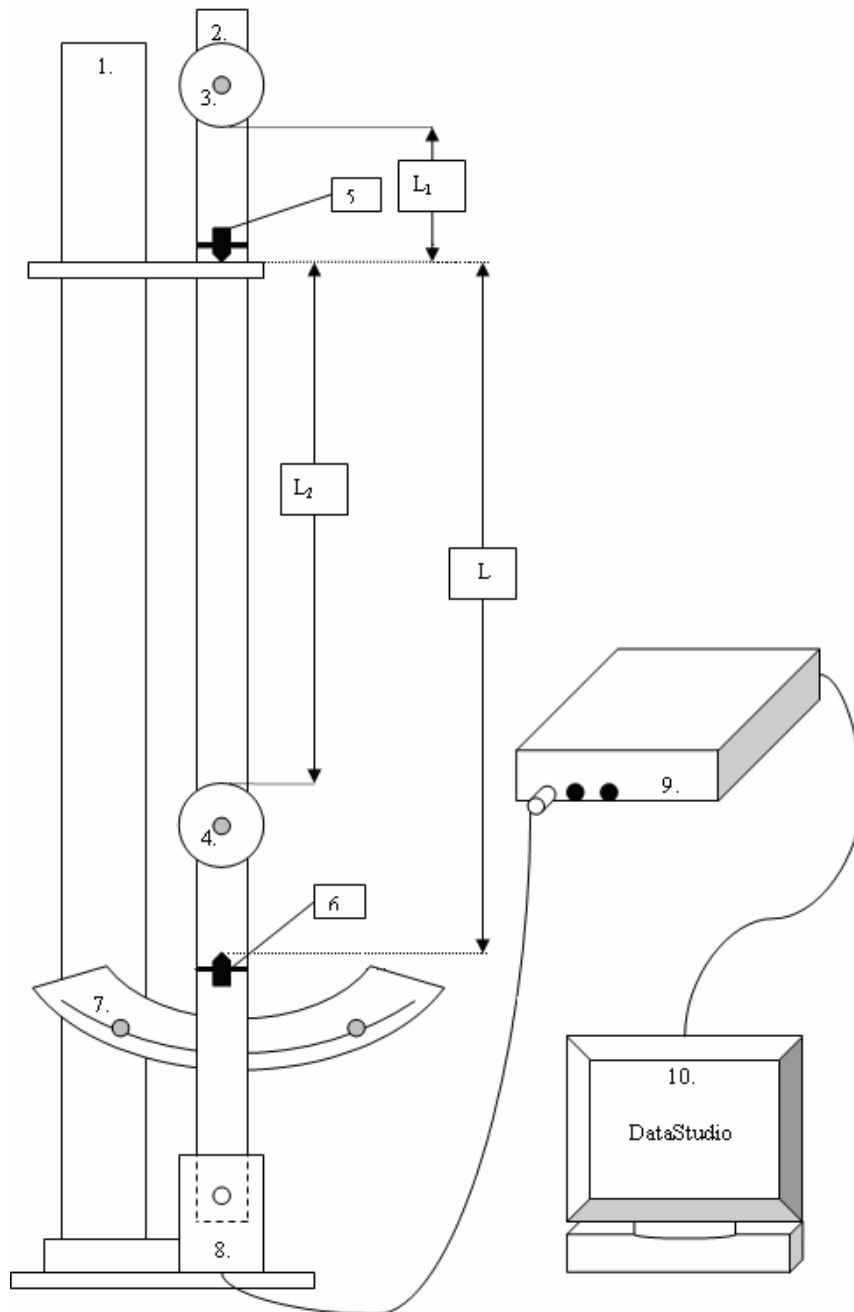
$$\sqrt{\frac{J_P}{Mg \frac{J_P}{Ms}} + \frac{J_P}{Mgs}} = \sqrt{\frac{Ms^2 + J_P}{Ms} \cdot \frac{1}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} = T_A$$

Fysikaalisella heilurilla on siis kaksi heilahdusakselia, joilla on sama heilahdusaika. Tästä tuloksesta on g :n arvo laskettavissa, kun kyseinen heilahdusaika määritetään. Työssä käytettävä laitteisto on koottu siten, että heilahdusakselit A ja A' sijaitsevat samalla suoralla painopisteen kanssa.

3 Mittauslaitteisto

Työssä käytettävä mittauslaitteisto on esitetty pääpiirteittäin kuvassa 1. Heiluri koostuu tukijalasta (1) sekä metallitangosta (2), johon on kiinnitetty kaksi tankoa pitkin liikuteltavaa punnusta; noin 1,4 kg:n punnus (4) heilahdusakselien välille ja toinen, noin 1 kg:n punnus (3) heilahdusakselien ulkopuolelle. Heilahtelu tapahtuu metallisten terien (5 ja 6) varassa. Heilurin telineeseen on kiinnitetty kulma-asteikko (7), johon on lisäksi asennettu heilahduskulman rajoitin. Liikettä havainnoimaan on heilurin alapäähän asennettu valoportti (8), joka mittaa heilurin heilahdusaikaa. Valoportista saatava data johdetaan muuntolaatikon (9) kautta tietokoneeseen (10), missä sitä voidaan käsitellä ja analysoida DataStudio-ohjelman avulla.

Heilahdusakselien välille on kaiverrettu asteikot 1-13 tangon molemmista päistä alkaen. Asteikot helpottavat mittauksia huomattavasti ja punnusta 4 liikuteltaessa niitä kannattaa hyödyntää.



Kuva 1. Työssä käytettävä laitteisto

4 Suoritettavat mittaukset

Mittauksissa etsitään heilahdusaika sellaiselle punnusten sijainnille, missä heilahdusaika kummankin heilahdusakselin suhteen on sama. Alkuperäisessä Katerin mittaustavassa liikuteltiin molempia punnuksia ja suoritettiin useita mittauksia, joiden keskiarvosta määritettiin putoamiskiihtyvyys. Koska käytössä on nyt kuitenkin tavallista kelloa tarkemmat laitteet (valoportti ja DataStudio), voidaan mittauksia yksinkertaistaa ja nopeuttaa lukitsemalla punnus 3 paikoilleen ja liikuttelemalla ainoastaan punnusta 4 heilahdusakselien välillä. Vihjeeksi voidaan sanoa, että punnus 3 kannattaa lukita mahdollisimman kauas kannatinterästä, kunhan se ei alhaalla ollessaan osu valoporttiin. Mittausten kuluessa on syytä pohtia miksi tämä on suositeltavaa ja mitä virhelähteitä toimenpide mahdollisesti pienentää.

4.1 Mittauksissa huomioitavaa

DataStudio-ohjelma käynnistetään normaalisti, tarvittaessa DataStudion käyttöohjeen mukaisesti, ja valitaan **experiment setup**-kohdassa Science Workshop-muuntolaatikkoon kytkettäväksi sensoriksi valoportti. Tämän jälkeen voidaan **timer setup**-kohdassa asettaa valoportti mittaamaan yhteen heilahdukseen kuluva aikaa siten, että timing sequense -ikkunaan valitaan objektit järjestyksessä blocked, unblocked, unblocked ja blocked. Yhden heilahduksen keston tällä heilurilla tulee olla kahden sekunnin luokkaa.

Vaikka käytettävä mittalaitteisto on hyvin yksinkertainen, voi mittaaja omalla huolimattomuudellaan aiheuttaa suuriakin virheitä lopputuloksiin. Saatettaessa heiluria liikkeeseen on viisainta käyttää kulma-asteikkoon kiinnitettyä rajoitinta ja varmistua sen avulla siitä, että heilahduskulma on pieni, esimerkiksi yksi aste, ja ettei se suuremmin vaihtelee eri mittauksissa. Kun heiluri on liikkeessä, odotetaan jonkin aikaa, jotta heiluminen sivuttaissuunnassa hieman vaimenee ja vasta sitten käynnistetään mittaus. Jokaisen mittauksen aikana kannattaa myös seurata sitä, että heilahdusaika pysyy suurin piirtein vakiona, eikä nopeita vaihteluita tapahdu. Ennen varsinaisten mittausten alkua kannattaa suorittaa muutama testiajo ja samalla miettiä sopivia mittauskäytäntöjä sekä varmistaa, että DataStudio mittaa haluttua suuretta. Lisäksi punnusta (4) liikuteltaessa on

jokaisella kerralla otettava tarkka etäisyys samaan heilurin akseliin, tai vaihtoehtoisesti hyödynnettävä mitta-asteikkoa, jonka etäisyydet pisteiden välillä voidaan määrittää ennen mittausten alkua.

Heilahdusaikaa mitattaessa heilurin kannatinterä ei saa olla telineen urassa, vaan sen vieressä tasaisella alustalla. Ura on vain säilytystä varten. Mittauksissa heilurin liikettä mitataan ainakin 20 heilahduksen ajan ja tältä väliltä määritetään DataStudion avulla keskimääräinen yhteen heilahdukseen kulunut aika.

4.2 Heilahdusaikojen mittaaminen

Alustava mittaus

Ensimmäisessä vaiheessa suoritetaan 10-20 mittausta liikutellen punnusta 4 koko akselien välisellä matkalla. Alustavan mittauksen voi näppärimmin suorittaa siten, että asetetaan heiluri roikkumaan toisesta ripustuspisteestä ja mitataan heilahdusajat kussakin punnuksen 4 asennossa. Käännetään heiluri sitten ylösalaisin ja toistetaan mittaus. Heilurin tankoon tehdyn jaotuksen avulla etäisyydet ovat riittävällä tarkkuudella määritettävissä. Saadut heilahdusajat piirretään DataStudion avulla etäisyyden L_2 funktiona siten, että heilahdusajoille punnuksen 3 ollessa ylhäällä ja alhaalla piirretään kuvaajat samaan kuvaan. Jos mittaukset on suoritettu huolella, saadut kuvaajat leikkaavat keskenään kahdessa pisteessä, jotka siis ovat pisteitä, joissa $T_{A'} = T_A$.

Tarkentava mittaus

Käytäntö on osoittanut, että toisessa leikkauskohdassa kuvaajat leikkaavat hyvin loivasti, kun taas toisessa leikkaus on jyrkempi. Leikkauspisteistä saatavat heilahdusajan arvot saattavat myös poiketa toisistaan jonkin verran. Tarkentavalla mittauksella voidaan saada lisävarmuutta tulosten luotettavuuteen.

Seuraavassa vaiheessa suoritetaan noin 10 mittausta lähellä niitä heiluritangon pisteitä, joissa ensimmäisistä mittaustuloksista piirretyt kuvaajat leikkaavat. Mittapisteet valitaan sopivin välein (esim. 5 mm) leikkauspisteiden molemmin puolin. Jokaisessa punnuksen 4 paikassa suoritetaan kaksi mittausta. Toinen mittaus suoritetaan siten, että punnus 3 on tangon yläpäässä, jonka jälkeen tanko käännetään liikuttamatta punnuksia ja suoritetaan

toinen mittaus punnuksen 3 ollessa tangon alapäässä. Kummankin leikkauspisteen ympäristöstä piirretään omat kuvaajansa. Kuvaajien leikkauspisteet ovat jälleen tapauksia joissa $T_{A'} = T_A$. Leikkauspisteistä saatujen heilahdusaikojen arvojen keskiarvoa voidaan nyt käyttää putoamiskiihtyvyyden määrittämiseen.

Heilahdusakseliä välimatkaa mitattaessa on syytä olla erityisen tarkkana, koska välimatkan poikkeamat vaikuttavat merkittävästi putoamiskiihtyvyyden arvoon. Heilahdusakseliä välimatka mitataan kannatinterien kärjistä.

5 Tulosten käsittely ja arviointi

Mittaukset kirjataan ylös erilliselle kaavakkeelle ja vastataan kaavakkeessa oleviin kysymyksiin. Mitatuista heilahdusajoista määritetään putoamiskiihtyvyyden arvo virheineen. Saatua arvoa verrataan teoreettiseen arvoon Jyväskylän leveysasteella (n. 62°). Putoamiskiihtyvyyden arvo leveysasteen funktiona on laskettavissa [3] lausekkeesta

$$g = 9,780490 \left(1 + 0,0052884 \sin^2 \theta - 0,0000059 \sin^2 (2\theta) \right), \quad (12)$$

missä θ on leveysaste. Vertailua tehdessä tulee esittää arvioita erilaisista virhelähteistä sekä niiden merkityksestä lopputuloksiin.

Viitteet

- [1] Hugh D. Young and Roger A. Freedman, University Physics with Modern physics, 10th edition. Sivut 281 ja 407-410, Addison-Wesley Publishing Company, USA, 2000.
- [2] Markku Lehto, Fysiikan Matemaattiset Perusteet II, 2.painos, Luku 5, Jyväskylän yliopiston fysiikanlaitos, 2001.
- [3] Handbook of Chemistry and Physics, 74th edition, CRC Press, USA, 1993-1994

Internetistä löytyy esityksiä reversioheilurista, ks. esimerkiksi

<http://polaris.phys.ualberta.ca/users/austen/Phys29x/Manual/20KaterPendulum99.pdf>